FORMULA INTEGRAL DE CAUCHY

- f holomorfa en C y en $RI(C)$, C: contorno cerrado simple, positivamente orientado.
- $z_0 \in RI(C)$

Entonces $\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz} \Rightarrow$ FIC

HOY: las holomorfas son C^∞!
↳ admiten derivadas de todos los órdenes.

Si f holomorfa en C y en $RI(C)$, C contorno cerrado simple
$\wedge$ $z_0 \in RI(C)$

$$\Rightarrow \quad f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz$$

y también: $$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,dz$$

o sea: f' es derivable en todo $z_0 \in RI(C) \Rightarrow f'$ es holomorfa.
$\Rightarrow$ existe f'' en $RI(C)$

f'' es derivable en todo $z_0 \in RI(C) \Rightarrow f''$ es holomorfa
$\Rightarrow$ existe f''' en $RI(C)$

$\vdots$

$f^{(n)}$ existe y:

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz} \qquad n=0,1,2,\dots$$

↳ FICG: Formula integral de Cauchy Generalizada

$f^{(0)} = f$
$f^{(1)} = f'$
$f^{(2)} = f'' \dots$

($n=0$: FIC)

Teorema: Sea $f(z)$ holomorfa en D. Entonces existen todas las derivadas $f'(z), f''(z), \dots, f^{(n)}(z), \dots$ en D.

(la derivada de una holomorfa es holomorfa)

$f(z) = u + iv \rightarrow$ holomorfa en D

$f'(z) = u'_x + i v'_x \rightarrow$ holomorfa $\quad u'_x, v'_x, u'_y, v'_y$: continua

$f''(z) = u''_{xx} + i v''_{xx} \rightarrow$ holomorfa $\quad \left.\begin{matrix} u''_{xx}, v''_{xx}, u''_{xy}, u''_{yy} \\ u''_{yx}, v''_{xy}, v''_{yx}, v''_{yy} \end{matrix}\right\}$ continua en D

$\quad = v''_{yx} + i(-u'_y)_x$

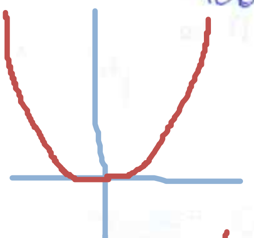
$\vdots$

$\Rightarrow u$ y v son C^∞ en D

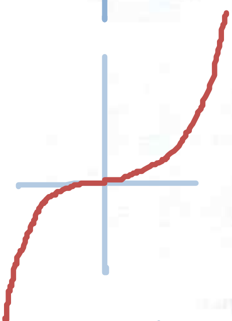
Teorema: si $f(z)$ es holomorfa en $D \Rightarrow u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$ son C^∞

Prob 25

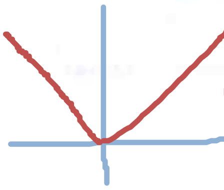
Obs: no toda función real derivable admite derivadas de todos los órdenes.



$$f(t) = |t|^3 = \begin{cases} t^3 & \text{si } t \geq 0 \\ -t^3 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$



$$f'(t) = \begin{cases} 3t^2 & \text{si } t > 0 \\ -3t^2 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \leftarrow \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h^3}{h} = 0 \\ \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-h^3}{h} = 0 \end{cases}$$



f''

$$f''(t) = \begin{cases} 6t & \text{si } t > 0 \\ -6t & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \leftarrow \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f'(h)-f'(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{3h^2}{h} = 0 \\ \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f'(h)-f'(0)}{h} = \lim \dfrac{-3h^2}{h} = 0 \end{cases}$$

f es C^2 en $\mathbb{R}$

$$f'''(t) = \begin{cases} 6 & \text{si } t > 0 \\ -6 & \text{si } t < 0 \\ \nexists & \text{si } t = 0 \end{cases} \longleftarrow \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f''(h) - f''(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{6h}{h} = 6 \\ \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f''(h) - f''(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{-6h}{h} = -6 \end{cases}$$

f no es C^3 en $\mathbb{R}$

f es derivable en $\mathbb{R}$, pero no admite derivada tercera en todo $\mathbb{R}$.

Ejemplos

① $$\int_C \frac{\cos z}{(z-\pi)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(\pi) = \frac{2\pi i(-\operatorname{sen}(\pi))}{1!} = 0$$

C: $|z| = 4$ (posit) $\qquad f(z) = \cos z$, $n = 1$, $z_0 = \pi \in RI(C)$

② $$\int_C \frac{e^z}{z^k}\,dz = \frac{2\pi i}{(k-1)!}\left(e^z\right)^{(n)}\Big|_{z_0=0} = \frac{2\pi i}{(k+1)!}$$

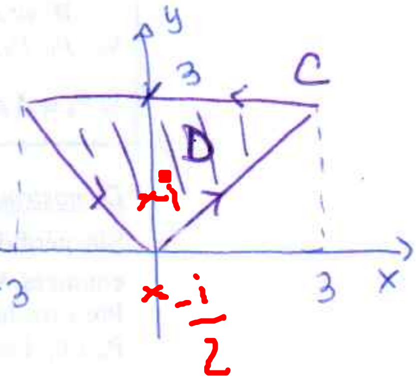
C: elipse $4x^2 + 2y^2 = 1$ (posit) $\qquad f(z) = e^z$, $n = k-1$, $z_0 = 0 \in RI(C)$

$k \in \mathbb{N}$

③ $$\int_C \frac{z}{(2z^2 - iz + 1)^2}\,dz$$

C: frontera de $D = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < \operatorname{Im} z < 3\}$ (posit)

$|x| < y < 3$



¿Dónde no es holomorfa $g(z) = \dfrac{z}{(2z^2 - iz + 1)^2}$?

$$2z^2 - iz + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{i \pm \sqrt{-1-4\cdot 2}}{4}$$

$$z = \frac{1}{4}i \pm \frac{3i}{4} \begin{cases} i \\ -i/2 \end{cases}$$

Resulta: $$g(z) = \frac{z}{\left[2(z-i)(z+\frac{i}{2})\right]^2} = \frac{z/4(z+i/2)^2}{(z-i)^2}$$

$i \in RI(C)$

$-\frac{i}{2} \notin RI(C)$

$$\int_C \frac{z}{(2z^2 - iz + 1)^2}\,dz = \int_C \frac{z/4(z+i/2)^2}{(z-i)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(i) = \frac{2\pi i}{27}$$

FICG

$$f(z) = \frac{z}{4(z+i/2)^2} \rightarrow f'(z) = \frac{i/2 - z}{4(z+i/2)^3}$$

$z_0 = i$

$n = 1$

④ $\displaystyle\int_C \frac{\cosh(az)}{(z+1)^5}\,dz \underset{\text{FICG}}{=} \frac{2\pi i}{4!} f^{(4)}(-1) = \frac{2\pi i}{24} a^4 \cosh(a) = \frac{\pi i a^4 ch(a)}{12}$

C: $|z-1| = 3$

$f(z) = \cosh(az)$

$n = 4$

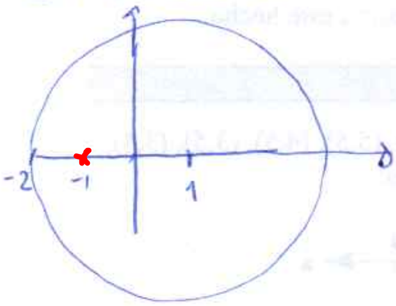
$z_0 = -1 \in RI(C)$

$f'(z) = a \,\text{senh}(az)$

$f''(z) = a^2 \cosh(az)$

$f'''(z) = a^3 \,\text{senh}(az)$

$f^{(4)}(z) = a^4 \cosh(az)$



⑤ $\displaystyle\int_C \frac{\cosh(az)}{(z+1)^{234}}\,dz = \frac{2\pi i}{233!} f^{(233)}(-1) = \frac{2\pi i}{233!} a^{233} \,\text{senh}(-a)$

TEOREMA DE MORERA

Si f es continua en un dominio D y si $\int_C f(z)dz = 0$ para todo contorno cerrado C contenido en D

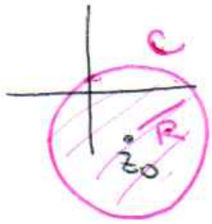
$\Rightarrow$ f tiene primitiva en D: existe F tal que $F'(z) = f(z)$ en D.
↳ holomorfa en D.

Por lo antes visto, F holomorfa en D $\Rightarrow$ admite derivadas de todos los órdenes. En particular, existe F''; debe ser: $F''(z) = f'(z)$, $z \in D$ $\Rightarrow$ f es holomorfa en D.

Teorema: sea f continua en $D \subset \mathbb{C}$ tal que $\int_C f(z)dz = 0$ para todo contorno cerrado C en D.
Entonces f es holomorfa en D.

Consecuencias de FICG

f holomorfo en $C: |z-z_0| = R$, y en $|z-z_0|<R$



$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \qquad n=0,1,2,\dots$$

f holo en $C \Rightarrow f$ continua en $C \Rightarrow |f|$ continua en $C \Rightarrow$

$|f|$ acotado en $C \Rightarrow$ existe $M_R > 0$ tal que

Prob 26

$|f(z)| \le M_R$ para $z \in C \Rightarrow \left|\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right| \le \dfrac{M_R}{R^{n+1}}$

$z \in C$, $|z-z_0| = R$

$$\boxed{|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M_R}{R^{n+1}}\cdot 2\pi R = \frac{n!\,M_R}{R^n}} \qquad n=0,1,2,\dots$$

Para $n=1$: $\boxed{|f'(z_0)| \le \dfrac{M_R}{R}}$ (*) $\longrightarrow$ ¿y qué R?

Consecuencia: si f es acotada en $\mathbb{C}$, es decir, existe $M \geq 0$

$|f(z)| \le M$ para todo $z \in \mathbb{C}$

y si f es holomorfo en $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ vale (*) para cq z_0,

para cq R y con $M_R \le M$ $\rightarrow$ no depende de R.

$$0 \le |f'(z_0)| \le \frac{M}{R}$$

Prob 28

$\Rightarrow f'(z_0) = 0$ para todo $z_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z)$ es constante!

Teorema (Liouville): si f es entera y acotada en $\mathbb{C} \Rightarrow f$ es constante

Si f es entera y no constante, entonces ....

Teorema fundamental del Álgebra.

Todo polinomio $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, $(a_n \neq 0)$ de grado $n \geq 1$ tiene al menos una raíz.

(existe z_0 tal que $P(z_0) = 0$)

Si no fuera así, $P(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ es holo en $\mathbb{C}$

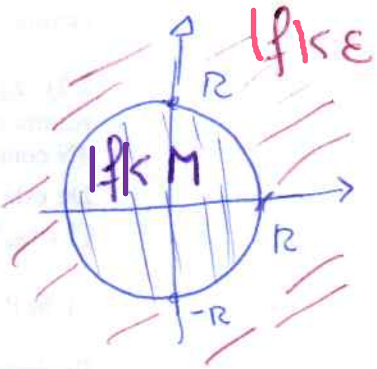
y además, acotada ya que:

$$\lim_{z \to \infty} P(z) = \infty \Rightarrow \lim_{z \to \infty} \frac{1}{P(z)} = 0 .$$

Quiere decir: dado $\varepsilon > 0$ $\exists R > 0 \ / \ |z| > R \Rightarrow \left| \dfrac{1}{P(z)} \right| = |f(z)| < \varepsilon$.

y en $D = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq R \}$, $|f|$ es acotada por ser continua

$\Rightarrow |f(z)| \leq M \quad \forall z \in D$



$$\Rightarrow \underbrace{|f(z)| \leq \max\{M, \varepsilon\} \quad \forall z \in \mathbb{C}}_{f \text{ acotada en } \mathbb{C}}$$

$\Rightarrow$ (Liouville) $\Rightarrow f$ es constante en $\mathbb{C}$

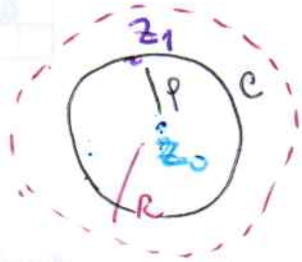
$\Rightarrow P$ es constante en $\mathbb{C}$ $\rightarrow$ ABSURDO!

MODULO MÁXIMO

LEMA: Sea f holomorfa en $|z-z_0|<R$.

Si $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo z tal que $|z-z_0|<R$

$\Rightarrow$ f es constante en $|z-z_0| \leq R$.



Dem: Sea $z_1 \neq z_0$ / $|z_1 - z_0| = \rho < R$

Sea C: circunf centro z_0, radio ρ

$\Rightarrow$ FIC: $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

parametrización de C: $z = z_0 + \rho e^{it}$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\rho e^{it})}{\rho e^{it}} \cdot \underbrace{i\rho e^{it}}_{z'(t)}\,dt$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{it})\,dt$$ $\rightarrow$ ($f(z_0)$ es promedio de los valores de f sobre la circunf)

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{it})\,dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+\rho e^{it})|\,dt$$

por hipótesis: $|f(z_0+\rho e^{it})| \leq |f(z_0)|$. Entonces:

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|\,dt = \frac{|f(z_0)|}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = |f(z_0)|$$

$\Rightarrow$ todos los "$\leq$" son "$=$"

$\Rightarrow$ $|f(z_0)| = |f(z_0+\rho e^{it})|$ $\quad$ ρ es cualquier radio $< R$.

$\Rightarrow$ $f(z_0) = f(z)$ $\quad$ para todo z : $|z-z_0|<R$

PRINCIPIO DEL MODULO MAXIMO

Sea f holomorfa y no constante en dominio D, → abierto conexo
Entonces f no alcanza valor máximo en D.

$\nexists\, z_0 \in D : |f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in D$

Corolario: si f es continua en una región cerrada y acotada, A y holomorfa en el interior de A, y f no constante, entonces el máximo de $|f(z)|$ se alcanza en la frontera de A.

Equivalen:

- Si f alcanza máximo en un dominio D ⇒ o es constante o no es holo en D
- Si f no es constante y alcanza máximo en dominio D ⇒ f no es holomorfa en D.
- Si f es holomorfa en dominio D y alcanza máximo en D ⇒ f es constante en D.

Además: si $f = u + iv$ satisface hipótesis del corolario,

$g(z) = e^{f(z)} = e^{u+iv}$ también las satisface.

⇒ $|g|$ alcanza máximo en la frontera de A (A cerrado y acotado)

$|g(z)| = e^{u(x,y)}$ alcanza máx. en frontera

⇒ $u(x,y)$ alcanza máx. en la frontera.

Corolario: si u(x,y) es la parte real de una función continua y no constante en un conjunto cerrado y acotado A, holomorfa en el interior de A, entonces u alcanza su máximo en la frontera.

Corolario 2: si f es continuo en región cerrada y acotada A, y no constante y holomorfo en el interior, y $f(z) \neq 0$ en A entonces $|f(z)|$ alcanza su valor mínimo en la frontera de A.

(por el corolario anterior aplicado a $g(z) = \frac{1}{f(z)}$)

Ejemplo $f(z) = e^{iz}$ holomorfo en $4x^2+y^2<4$ y continuo en $4x^2+y^2 \leq 4$

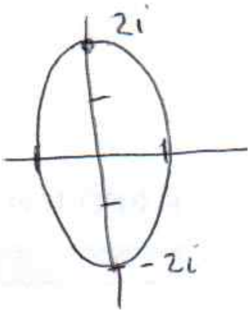
$\Rightarrow |f(z)|$ alcanza máximo en $4x^2+y^2=4$

$$|f(z)| = e^{-y} \leq e^{2},$$

$y \geq -2$

$-y \leq 2$

$e^{-y} \leq e^{2}$



y alcanza esa cota en $z_0 = -2i$

$$|f(-2i)| = |e^{i(-2i)}| = e^{2}$$

Como $f \neq 0$ en $\mathbb{C} \Rightarrow |f(z)|$ alcanza mínimo en $4x^2+y^2=4$.

$|f(z)| = e^{-y} \geq e^{-2}$ y alcanza esa cota en $z_1 = 2i$

$y \leq 2$

$-y \geq -2$

$e^{-y} \geq e^{-2}$

$$|f(2i)| = |e^{i(2i)}| = e^{-2}$$